Автономная некоммерческая профессиональная образовательная организация

«УРАЛЬСКИЙ ПРОМЫШЛЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

**Методические указания**

**к самостоятельной работе студентов**

по учебной дисциплины

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

**Специальность:** 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

2016

|  |  |
| --- | --- |
| Одобрена цикловой комиссией  информатики и вычислительной техники  Председатель комиссии  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О. Г. Максимова  Протокол №  от « » \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 201\_\_г. | Методические указания разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта по специальности среднего профессионального образования, входящей в состав укрупненной группы специальностей «Информатика и вычислительная техника» «Программирование в компьютерных системах»  *УТВЕРЖДАЮ*  Заместитель директора по  учебной работе АН ПОО «Уральский промышленно-экономический техникум»  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Н.Б. Чмель  « » \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 201 \_\_ г. |

Разработчик: **Максимова О.Г.** преподаватель дисциплины

«*Математические методы*» АН ПОО «Уральский промышленно-экономический техникум»

Техническая экспертиза рабочей программы

учебной дисциплины «*Математические методы»*пройдена.

Эксперты:

Методист АН ПОО «Уральский промышленно-экономический техникум»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Т.Ю. Иванова

**Содержание**

[Пояснительная записка 4](#_Toc480212573)

[Перечень видов внеаудиторной самостоятельной работы 6](#_Toc480212574)

[Индивидуальное домашнее задание 1 7](#_Toc480212575)

[Индивидуальное домашнее задание 2 19](#_Toc480212576)

[Индивидуальное домашнее задание 3 31](#_Toc480212577)

[Индивидуальное домашнее задание 4 43](#_Toc480212578)

[Индивидуальное домашнее задание 5 44](#_Toc480212579)

[Индивидуальное домашнее задание 6 53](#_Toc480212580)

[Индивидуальное домашнее задание 7 64](#_Toc480212581)

[Индивидуальное домашнее задание 8 76](#_Toc480212582)

[Индивидуальное домашнее задание 9 88](#_Toc480212583)

[Индивидуальное домашнее задание 10 89](#_Toc480212584)

[Индивидуальное домашнее задание 11 90](#_Toc480212585)

[Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы 91](#_Toc480212586)

# Пояснительная записка

Программа внеаудиторной самостоятельной работы студента составлена на основе рабочей программы по дисциплине «Математические методы», Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования специальности 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах»

Целью самостоятельной работы студентов является обучение навыкам работы с научно-теоретической, периодической, научно-технической литературой и нормативной документацией, необходимыми для углубленного изучения дисциплины «Математические методы», а также развитие у них устойчивых способностей к самостоятельному изучению и изложению полученной информации.

Основными задачами самостоятельной работы студентов являются:

* овладение знаниями;
* наработка профессиональных навыков;
* приобретение опыта творческой и исследовательской деятельности;
* развитие творческой инициативы, самостоятельности и ответственности студентов.

Самостоятельная работа студентов по дисциплине " Математические методы а" обеспечивает:

* закрепление знаний, полученных студентами в процессе лекционных и практических занятий;
* формирование навыков работы с периодической, научно-исследовательской литературой и нормативной документаций.

Самостоятельная работа является обязательной для каждого студента.

Данные методические указания предлагаются в помощь студентам для выполнения заданий самостоятельных работ предусмотренных рабочей программой дисциплины «Математические методы».

Методические указания помогут и позволят студентам:

* получить полный перечень заданий всех самостоятельных работ по дисциплине;
* ознакомиться с методикой и ходом выполнения самостоятельных работ;
* ознакомиться с перечнем тем индивидуальных заданий и докладов;
* выбрать одну из тем индивидуальных заданий и реферативных сообщений для исследования;
* структурировать самостоятельную работу;

подобрать источники для конспектирования теоретических вопросов, составления схем, таблиц, рисунков и др

Рабочей программой дисциплины предусмотрено 33 часа самостоятельной работы обучающегося

# Перечень видов внеаудиторной самостоятельной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа по дисциплине «Математические методы» выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов осуществляется в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине «Математические методы» может проходить в письменной, устной или смешанной форме.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Наименование разделов, тем | Вид внеаудиторной самостоятельной работы | Количество часов |
| 1 | 2 | 3 |
| **Раздел 1. Основы моделирования**  Тема 1.1 Основы моделирования | Индивидуальные домашние задания на тему:   * Построение простейших математических моделей. | 3 |
| **Раздел 2. Детерминированные задачи**  Тема 2.1 Линейное программирование  Тема 2.2 Целочисленное программирование  Тема 2.3 Нелинейное программирование  Тема 2.4 Динамическое программирование  Тема 2.5 Алгоритмы на графах | Индивидуальные домашние задания на тему:   * Решение задачи линейного программирования * Решение транспортной задачи * Метод отсечений Гомори * Решение задачи нелинейного программирования графическим методом и методом множителей Лагранжа * Решение задачи динамического программирования * Сетевые модели | 18 |
| **Раздел 3. Задачи в условиях неопределённости**  Тема 3.1  Системы массового обслуживания  Тема 3.2  Имитационное моделирование  Тема 3.3 Математические методы в прогнозировании  Тема 3.4 Элементы теории игр  Тема 3.5 Элементы теории принятия решений | Индивидуальные домашние задания на тему:   * Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания * Построение прогнозов статистическими методами с помощью инструментария MS Excel * Решение одноходовой антагонистической игры | 9 |
| Индивидуальные домашние задания на тему   * Применение метода имитационного моделирования к простейшим задачам теории массового обслуживания | 3 |
| Всего часов |  | 33 |

# Индивидуальное домашнее задание 1

**Тема** Построение простейших математических моделей. Построение простейших статистических моделей

**Цель работы:** закрепить практические навыки по построению простейших математических и простейших статистических моделей.

**Краткая теория**

Построение математической модели процесса, явления или объ­екта начинается с построения упрощенного варианта модели, в ко­тором учитываются только основные черты. В результате прослеживаются основные связи между входными параметрами, ограничениями и показателем эффективности. Общего подхода к построе­нию модели нет. В каждом конкретном случае при построении математической модели учитывается большое количество факторов: цель построения модели, круг решаемых задач, точность описания модели и точность выполнения вычислений. Математическая модель должна отражать все существенные факторы, определяющие ее по­ведение, и при этом быть простой и удобной для восприятия резуль­татов. Каждая математическая модель процесса, явления или объекта в своей основе имеет математический количественный метод.

Применение математических количественных методов для обоснования выбора того или иного управляющего решения во всех областях человеческой деятельности называется *исследованием операций.*Целью исследования операций является нахождение с использованием специального математического аппарата решения, удовлетворяющего заданным условиям. На самом деле при реше­нии практически любой задачи имеется неограниченное количество решений. Множество решений, удовлетворяющих заданным усло­виям (ограничениям), называется допустимым множеством решением. Выбор из множества допустимых решений одного решения, наилучшего в каком-либо смысле, называемого *оптимальным*решением, и есть задача исследования операций.

*Модель — это материальный или идеальный объект, заменяю­щий оригинал, наделенный основными характеристиками (черта­ми) оригинала и предназначенный для проведения некоторых дей­ствий над ним с целью получения новых сведений об оригинале.*



Рис. 1. Классификация моделей

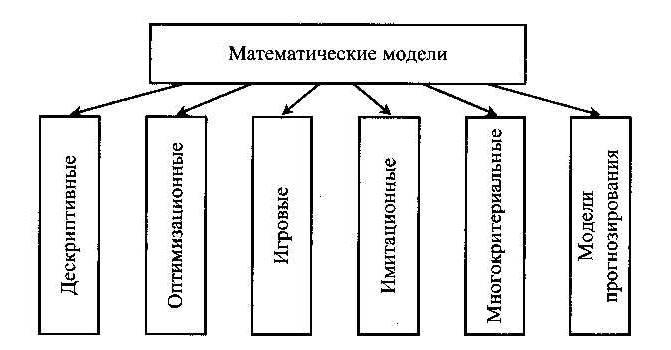


Рис. 2. Классификация математических моделей

При построении математической модели необходимо обеспе­чить *достаточную*точность вычислений (точность решения) и *не­обходимую*подробность модели. Любая математическая модель включает в себя описание основных, т. е. *необходимых*для исследо­вания свойств и законов функционирования исследуемого объекта, процесса или явления. В своей основе каждая мате­матическая модель имеет целевую функцию, которая описывает функционирование реального объекта, процесса или явления. В зависимости от исследуемого (моделируемого) объекта, явления или процесса *целевая функция*может быть представлена одной функ­циональной зависимостью, системой уравнений (линейных, нели­нейных, дифференциальных и т. д.), набором статистических дан­ных и т. д. При работе с целевой функцией исследователь воздейст­вует на нее через ***набор входных параметров***(рис. 3).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Входной параметр 1 |  | Выходной параметр 1 |
| Входной параметр 2 |  | Выходной параметр *2* |
| Входной параметр 3 | Модель системы | Выходной параметр 3 |
| Входной параметр *п-*1 | (объекта или процесса) | Выходной параметр *т -*1 |
| Входной параметр*n* |  | Выходной параметр *т* |
|  |  |  |

Рис. 3. Обобщенная схема математической модели

По способу реализации математические модели можно разде­лить следующим образом.

1. Линейное программирование.

Математическая модель целиком (целевая функция и ограниче­ния) описывается уравнениями первого порядка. Линейное програм­мирование включает в себя несколько методов решения (задач):

* симплексный;
* графический;
* транспортная задача;
* целочисленное программирование.

2. Нелинейное программирование.

Целевая функция и ограничения, составляющие математическую модель, содержат хотя бы одно нелинейное уравнение (уравнение второго порядка и выше). Нелинейное программирование содержит несколько методов решения (задач):

* графический;
* регулярного симплекса;
* деформируемого многогранника (Нелдера - Мида);
* градиентный.

3. Динамическое программирование.

Ориентировано на решение задач прокладки магистралей крат­чайшим путем и перераспределения различных видов ресурсов.

4. Сетевое планирование.

Решает проблему построения графика выполнения работ, рас­пределения производственных, финансовых и людских ресурсов.

5. Принятие решений и элементы планирования.

В этом случае и качестве целевой функции выступает набор ста­тистических данных или некоторые данные прогноза. Решением задачи являются рекомендации о способах поведения (стратегии). Решение носит рекомендательный характер (приблизительное решение). Выбор стратегии целиком остается за человеком — ответ­ственным лицом, принимающим решение. Для принятия решения разработаны следующие теории:

* теория игр;
* системы массового обслуживания.

**Задание 1.** Составить математическую модель следующей задачи. На складе имеется 300 кг сырья. Надо изготовить два вида про­дукции. На изготовление первого изделия требуется 2 кг сырья, а на изготовление второго изделия — 5 кг. Определить план выпуска двух изделий.

Решение.

Обозначим, х1 – единица первого изделия, х2 – единица второго изделия. Тогда составим математическая модель: 2х1+5х2=300.

**Задание 2.** Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал 3-х сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется 14 кг первого сорта, 12 кг второго сорта и 8 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется 8 кг первого сорта, 4 кг второго сорта, 2 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта 624 кг, второго сорта 541 кг, третьего сорта 376 кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида 7 руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида 3 руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

Решение.

Составим математическую модель задачи:

Пусть х1 – единица готовой продукции вида А,

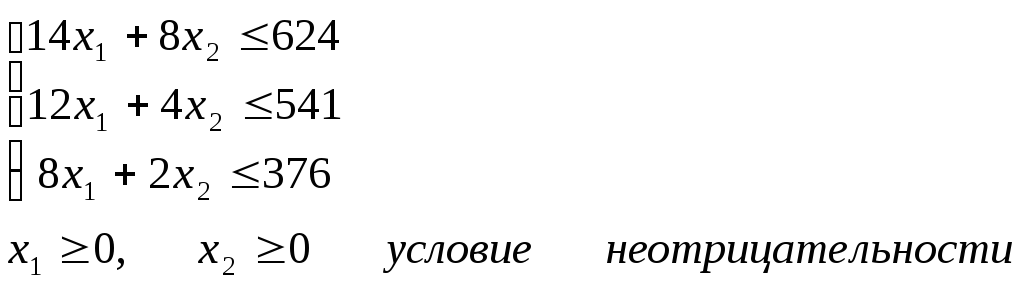
x2 - единица готовой продукции вида В,

Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов

А и В, тогда:

http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-Q6c5Oi.png

Система ограничений:



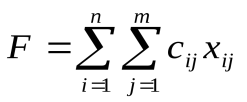
**Задание 3.** Составить математическую модель следующей задачи. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве 200, 450, 250 тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно 100, 125, 325, 250, 100 тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | 5 | 8 | 7 | 10 | 3 |
| **А2** | 4 | 2 | 2 | 5 | 6 |
| **А3** | 7 | 3 | 5 | 9 | 2 |

Решение:

Проверка сбалансированности модели задачи. Модель является сбалансированной, т.к. суммарный объем запасов сырья равен суммарному объему потребности в ней:

200+450+250=100+125+325+250+100.

Построение математической модели – неизвестными в этой задачи является объем перевозок. Пусть http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-sAb6XW.png- объем перевозок с*i*-го предприятия в *j-*го пункт потребления. Суммарные транспортные расходы - это функционал качества (критерий цели): ,

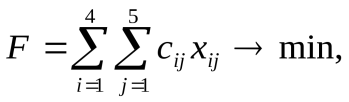
Где http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-g6520a.png- стоимость перевозки единицы продукции с*i*-го предприятия в *j*-й пунктах потребления.

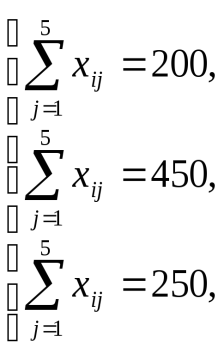
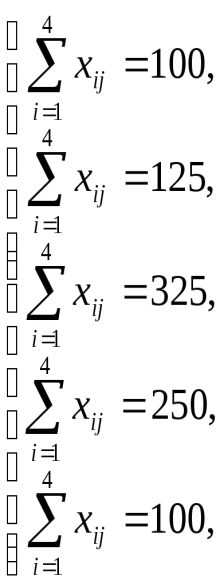
Неизвестные в этой задачи должны удовлетворять следующим ограничениям:

Объем перевозок не могут быть отрицательными;

Поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятия, а потребность всех пунктов потребления должна быть полностью удовлетворены.

Итак, имеем следующую задачу:

Найти минимум функционала: 

При ограничениях: http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-G5jdLT.png,

Задания для самостоятельной работы

1 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *а1* кг первого сорта, *а2* кг второго сорта и *а3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *с1* кг, второго сорта *с2* кг, третьего сорта *с3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида *α* руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида *β* руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

*а1= 19, а2= 16, а3= 19,**b1= 26,**b2= 17,**b3= 8,**c1= 868,**c2= 638,**c3= 853,*

*α=5, β=4.*

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве *а1, а2 и а3* тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно *b1,**b2,**b3,**b4,**b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты поставки | Пункты потребления | | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| А2 | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| А3 | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| *а1=300, а2=250, а3=200,*  *b1=210,**b2=150,**b3=120,**b4=135,**b5=135.* | http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-928UYh.png |

2 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *а1* кг первого сорта, *а2* кг второго сорта и *а3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *с1* кг, второго сорта *с2* кг, третьего сорта *с3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида *α* руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида *β* руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

*а1= 14, а2= 15, а3= 20,**b1= 40,**b2= 27,**b3= 4,**c1= 1200,**c2= 993,**c3= 1097,*

*α=5, β=13.*

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве *а1, а2 и а3* тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно *b1,**b2,**b3,**b4,**b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты поставки | Пункты потребления | | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| А2 | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| А3 | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| *а1=350, а2=200, а3=300,*  *b1=170,**b2=140,**b3=200,**b4=195,**b5=145.* | http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-9UthWo.png |

3 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется а1 кг первого сорта, а2 кг второго сорта и а3 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется b1 кг первого сорта, b2 кг второго сорта, b3 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта с1 кг, второго сорта с2 кг, третьего сорта с3 кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

а1= 9, а2= 15, а3= 15, b1= 27, b2= 15, b3= 3, c1= 606, c2= 802, c3= 840,

α=11, β=6.

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве а1, а2 и а3 тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно b1, b2, b3, b4, b5 тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты поставки | Пункты потребления | | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| А2 | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| А3 | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| *а1=200, а2=250, а3=200,*  *b1=190,**b2=100,**b3=120,**b4=110,**b5=130.* | http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-3YdmmA.png |

4 Вариант

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *а1* кг первого сорта, *а2* кг второго сорта и *а3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *с1* кг, второго сорта *с2* кг, третьего сорта *с3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида *α* руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида *β* руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

*а1= 13, а2= 13, а3= 11,**b1= 23,**b2= 11,**b3= 1,**c1= 608,**c2= 614,**c3= 575,*

*α=5, β=7.*

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве *а1, а2 и а3* тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно *b1,**b2,**b3,**b4,**b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты поставки | Пункты потребления | | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| А2 | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| А3 | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| *а1=230, а2=250, а3=170,*  *b1=140,**b2=90,**b3=160,**b4=110,**b5=150.* | http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-f8lGg_.png |

5 Вариант.

Задача 1. Составить математическую модель следующей задачи. Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется *а1* кг первого сорта, *а2* кг второго сорта и *а3* кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется *b1* кг первого сорта, *b2* кг второго сорта, *b3* кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта *с1* кг, второго сорта *с2* кг, третьего сорта *с3* кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида *α* руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида *β* руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В.

*а1= 19, а2= 16, а3= 19,**b1= 31,**b2= 9,**b3= 1,**c1= 1121,**c2= 706,**c3= 1066,*

*α=16, β=19.*

Задача 2. Имеются три пункта поставки однородного груза А1, А2, А3 и пять пунктов В1, В2, В3, В4, В5 потребления этого груза. На пунктах А1, А2 и А3 находится груз соответственно в количестве *а1, а2 и а3* тонн. В пункты В1, В2, В3, В4, В5 требуется доставить соответственно *b1,**b2,**b3,**b4,**b5* тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты поставки | Пункты потребления | | | | |
| В1 | В2 | В3 | В4 | В5 |
| А1 | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| А2 | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| А3 | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| *а1=200, а2=300, а3=250,*  *b1=210,**b2=150,**b3=120,**b4=135,**b5=135.* | http://www.studfiles.ru/html/2706/379/html_v3Nq5bgQOQ.wl9I/img-DyXuau.png |

Контрольные вопросы

1. Что такое модель?
2. Приведите классификацию моделей.
3. Какие вы знаете виды математических моделей?
4. Дайте определение целевой функции.
5. Что такое область допустимых решений?
6. Что называется допустимым решением, оптимальным решением?
7. Какие способы реализации математических моделей вы знаете?

# Индивидуальное домашнее задание 2

**Тема:** Решение задачи линейного программирования

**Цель работы:** Научиться сводить произвольную задачу линейного программирования к основной задаче линейного программирования. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

**Краткая теория**

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Сущность линейного программирования состоит в нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции F), которые удовлетворяют системе ограничений, называется допустимым планом задачи линейного программирования. Функция F, максимум или минимум которой определяется, называется целевой функцией задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции F, называется оптимальным планом задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (ЗЛП) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

Общая форма задачи линейного программирования формулируют следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_1_5 | (1) |
| example_2_1_6 | (2) |
| example_2_1_7 | (3) |

Коэффициенты ***ai,j, bi, cj, j = 1, 2, ... , n, i =1, 2, ... , m*** – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1) условий задачи и требованиям неотрицательности (2), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (3) целевой функции, - **оптимальными**.

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются **каноническая** и **стандартная**.

В **канонической форме** задача является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции ***F***, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи ***х1, х2, ..., хn*** являются неотрицательными:

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_1_8 | (4) |
| example_2_1_6 | (5) |
| example_2_1_7 | (6) |

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

**Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:**

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, при чем в неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случаи неравенства «≥» - со знаком «-»

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_1_9 | (7) |

Вводим переменную example_2_1_10.

Тогда неравенство (7) запишется в виде:

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_1_11 | (8) |

В каждое из неравенств вводится своя “**уравнивающая**” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_1_12 | , *l* - свободный индекс |

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1)

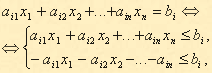
4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, то введением новой целевой функции ***F1 = -F*** мы преобразуем нашу задачу на минимум функции ***F*** в задачу на максимум функции ***F1***.

Таким образом, ***всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.***

В стандартной форме задача линейного программирования является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа « <= » или « >= ». Все переменные задачи неотрицательны.

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_1_13 | (9) |
| example_2_1_7 |  |
| example_2_1_6 |  |

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимопротивоположных неравенств:



Существует и другие способы преобразования системы равенств в систему неравенств, т.е. ***всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в стандартной форме.***

**Решение задач линейного программирования симплекс-методом.**

Идея симплекс-метода заключается в последовательном улучшении первоначального плана путем упорядоченного перехода от одного опорно­го плана к другому и завершается нахождением оптимального плана. Сим­плекс-методом решаются только канонические задачи линейного программирования. Решение канонической задачи симплекс-методом существенно облегчается применением так называемых симплексных таблиц. Всякую  
каноническую задачу можно записать условно в виде таблицы. Таблица  
заполняется следующим образом: первые *т* строк содержат в условной  
форме уравнения системы ограничений, разрешенные относительно базис­ных переменных. В последней строке записана целевая функция, эта строка называется F -строкой. В столбцах записаны свободные переменные и свободные члены.

***Условие оптимальности плана:***если ЗЛП на максимум, то в F-строке не должно быть отрицательных элементов; если ЗЛП на минимум, то в F-строке не должно быть положительных элементов.

***Алгоритм решения:***

Исходную задачу линейного программирования приводим к каноническому виду путем введения базисных переменных.

Базисные переменные выражаем через свободные переменные.

Строим начальный план, полагая свободные переменные равными  
нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам.

Строим первую симплекс-таблицу.

Проверяем план на оптимальность. Если план не оптимален, то его улучшаем.

Улучшение плана.

а) выбор разрешающего столбца: для этого в F- строке выбираем максимальный по абсолютной величине из отрицательных элементов, если задача на максимум, или, максимальный из положительных элементов, если задача на минимум. Пусть это будет столбец с номером ***s***;

б) выбор разрешающей строки: выбираем строку с минимальным симплексным отношением. Симплексные отношения - это отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Пусть это будет строка с номером ***r***.

в) выбор разрешающего элемента: элемент, стоящий на пересечении разрешающих строки и столбца. Пусть это будет элемент **.**

г) переменную вводим в базис вместо переменной  .

д) элементы новой симплекс-таблицы  пересчитываем по следующим формулам:

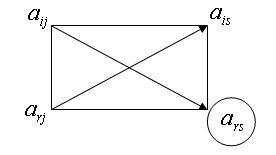
разрешающий элемент ,

элементы разрешающего столбца ,

элементы разрешающей строки ,

остальные элементы симплекс-таблицы по правилу прямоугольника:





Вновь полученный план проверяем на оптимальность.

**Порядок выполнения заданий**

**Задание 1. а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.



**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Решение:**

**а)** Введем дополнительные переменные ***x4, x5***. Причем в первое неравенство введем переменную ***x4*** со знаком плюс, а в третье – неотрицательную переменную***, x5*** со знаком минус запишем задачу в виде:



Переведем *min* на *max*, домножив целевую функцию на (-1)



что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

**б)** Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме**. Преобразование задачи на минимум в задачу на максимум, а также обеспечение не отрицательности переменных производится так же, как и раньше. Всякое равенство в системе ограничений равносильно системе взаимопротивоположных неравенств, тогда получим:



**Задание 2.** Для производства двух видов, изделии  и  используется, три вида сырья , запасы которого соответственно равны 100, 60, 180 единиц. Для производства одной единицы продукции  используется 2 единицы сырья  и по 1 единице сырья . Для производства одной единицы продукции  используется по 1 единице сырья  и 4 едини­цы сырья . Прибыль от реализации 1 единицы каждой продукции  и  соответственно равна 30 и 20 единиц. Необходимо составить симплекс-методом такой план выпуска продукции  и , при котором суммарная прибыль будет наибольшей.

**Решение.**

1. Составим математическую модель задачи:

Пусть х1 – единица готовой продукции вида ,

x2 - единица готовой продукции вида ,

Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов  и , тогда:



Система ограничений:



Задачу приводим к каноническому виду:





Базисные переменные выражаем через свободные:



Записываем начальный план: 

Строим первую симплекс-таблицу:

Таблица 1. Первая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Своб. перем.  Базис. перем. |  |  | Свободные члены | Симплексные отношения |
|  | 2 | 1 | 100 |  |
|  | 1 | 1 | 60 |  |
|  | 1 | 4 | 180 |  |
| F-строка | -30 | -20 | 0 |  |

Начальный план не оптимален, так как в F-строке есть отрицательные элементы.

Улучшение плана. Строим вторую симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 2 – Вторая симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Своб. перем.  Базис. перем. |  |  | Свободные члены | Симплексные отношения |
|  |  |  | 50 | 100 |
|  |  |  | 10 | 20 min |
|  |  |  | 130 |  |
| F-строка | 15 | -5 | 1500 |  |

План, соответствующий таблице 2,  не оптимален, так как в F-строке есть отрицательные элементы. Улучшаем его.

Улучшение плана. Строим третью симплекс-таблицу, элементы которой пересчитываем по соответствующим формулам.

Таблица 3– Третья симплекс-таблица

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Своб. перем.  Базис. перем. |  |  | Свободные члены | Симплексные отношения |
|  | 1 | -1 | 40 |  |
|  | -1 | 2 | 20 |  |
|  | 3 | -7 | 60 |  |
| F-строка | 10 | 10 | 1600 |  |

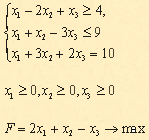
План, соответствующий таблице 3,  оптимален, так как в F-строке нет отрицательных элементов.

Ответ: если предприятие будет выпускать продукцию вида  и  в количестве 40 и 20 единиц соответственно, то получит максимальную прибыль в размере 1600 единиц, при этом сырье  будет израсходовано полностью, а сырье  останется в количестве 60 единиц.

**Задания для самостоятельной работы**

**1 вариант.**

**Задача 1.** **а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

****

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

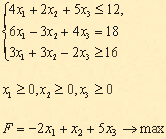
**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***а1*** кг первого сорта, ***а2*** кг второго сорта и ***а3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***с1*** кг, второго сорта ***с2*** кг, третьего сорта ***с3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симлекс-методом.

***а1= 19, а2= 16, а3= 19, b1= 31, b2= 9, b3= 1, c1= 1121, c2= 706, c3= 1066,***

***α=16, β=19.***

**2 вариант.**

**Задача 1.** **а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

****

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

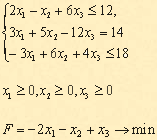
**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***а1*** кг первого сорта, ***а2*** кг второго сорта и ***а3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***с1*** кг, второго сорта ***с2*** кг, третьего сорта ***с3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

***а1= 14, а2= 15, а3= 20, b1= 40, b2= 27, b3= 4, c1= 1200, c2= 993, c3= 1097,***

***α=5, β=13.***

**3 вариант.**

**Задача 1.** **а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

****

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***а1*** кг первого сорта, ***а2*** кг второго сорта и ***а3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***с1*** кг, второго сорта ***с2*** кг, третьего сорта ***с3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

***а1= 14, а2= 15, а3= 20, b1= 40, b2= 27, b3= 4, c1= 1200, c2= 993, c3= 1097,***

***α=5, β=13.***

**4 вариант.**

**Задача 1.** **а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

****

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

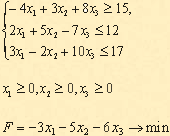
**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***а1*** кг первого сорта, ***а2*** кг второго сорта и ***а3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***с1*** кг, второго сорта ***с2*** кг, третьего сорта ***с3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

***а1= 9, а2= 15, а3= 15, b1= 27, b2= 15, b3= 3, c1= 606, c2= 802, c3= 840,***

***α=11, β=6.***

**5 вариант.**

**Задача 1.** **а)** Привести к канонической форме задачу линейного программирования.

****

**б)** Напишите задачу в стандартной форме.

**Задача 2.** Предположим, что для производства продукции вида А и В можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется ***а1*** кг первого сорта, ***а2*** кг второго сорта и ***а3*** кг третьего сорта. На изготовление продукции вида В расходуется ***b1*** кг первого сорта, ***b2*** кг второго сорта, ***b3*** кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта ***с1*** кг, второго сорта ***с2*** кг, третьего сорта ***с3*** кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль вида ***α*** руб., а от реализации единицы готовой продукции вида В фабрика имеет прибыль вида ***β*** руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов А и В симплекс-методом.

***а1= 13, а2= 13, а3= 11, b1= 23, b2= 11, b3= 1, c1= 608, c2= 614, c3= 575,***

***α=5, β=7.***

**Контрольные вопросы**

1. Какие задачи можно отнести к задачам линейного программирования?
2. Какова основная идея линейного программирования?
3. Что образует систем ограничений?
4. Что называется допустимым планом?
5. Что называется целевой функцией?
6. Как записывается общая форма задачи линейного программирования?
7. Как строится каноническая форма ЗЛП?
8. Как перевести ЗЛП в стандартную форму?
9. Какова идея симплекс-метода?
10. В чем суть условия оптимальности плана?
11. Из каких пунктов состоит алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом?
12. Что такое симплекс-отношение?

# Индивидуальное домашнее задание 3

**Тема:** Решение транспортной задачи

**Цель работы:** Найти начальное решение транспортной задачи двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости. Найти оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов.

**Краткая теория**

Симплексный метод для решения задач линейного программирова­ния является универсальным, он позволяет решить любую задачу, но ре­шение иных задач связано с трудоемкими расчетами. Можно выделить класс задач, которые решаются более простыми специальными методами. К числу таких задач относятся так называемые **транспортные задачи.**

**Классическая транспортная задача** - о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта или взаимозаменяемых продуктов из пунктов отправления в пункты назначения.

Классическая транспортная задача (сокращенно ТЗ) формулируется следующим образом.

В пунктах отправления , которые будем называть также поставщиками, сосредоточены запасы однородного груза в количествах  соответственно. В пункты назначения , именуемые потребителями, надлежит доставить соответственно единиц груза.

Известен транспортный тариф - стоимость перевозки единицы груза из пункта  в пункт , . Требуется составить такой план перевозок груза, при котором общая стоимость F всех пе­ревозок была бы наименьшей, при этом все заявки были бы выполнены.

В термин "транспортный тариф" вкладывается условное понимание стоимости единицы груза - это может быть себестоимость, расстояние, тариф,  
время, расход топлива или электроэнергии и др.

Пусть суммарные запасы грузов у поставщиков равны суммарным  
потребностям потребителей:



Это условие называется условием баланса. Если для ТЗ условие баланса выполняется, то модель ТЗ называется закрытой, если условие баланса не выполнено, то модель ТЗ - открытая. Составим математическую модель ТЗ.

Пусть *-* количество груза, которое поставщик отправляет по­требителю  () со стоимостью перевозок *.* Данные задачи можно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Поставщики | Потребители | | | | Запасы |
|  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  |  |
| … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |  |
| Потребности |  |  | … |  |  |

По смыслу своему величины  и должны удовлетворять следующим ограничениям:

* Из пункта  все запасы должны быть вывезены (ограничения по ресурсам): ;
* Заявки потребителей  должны быть выполнены (ограничения по потребностям): .

Затраты на перевозку единиц груза из пункта поставки  в пункт потребления составляют  рублей; общая же стоимость всех перевозок равна сумме всех таких затрат: 

Математическая постановка ТЗ состоит в следующем:

составить план перевозок *,* удовлетворяющих системе ограничении:

,

условию неотрицательности: , , при котором целевая функция достигает своего минимума:



Из математической модели видно, что ТЗ является частным случаем общей задачи линейного программирования. В общей теории линейного про­граммирования доказаны следующие теоремы:

***Теорема 1. Транспортная задача при выполнении условия баланса всегда имеет решение.***

***Теорема 2. Система ограничений транспортной задачи содержит т+п-1 линейно-независимых уравнений.***

При решении задач практический смысл теоремы 2 заключается в следующем: число назначенных перевозок равно *т+п-1.*

Процедура решения ТЗ будет состоять в последовательном улучше­нии опорных планов и проверки их на оптимальность.

**Методы построения начального плана.**

Существует несколько методов построения первоначального опорно­го плана ТЗ (опорный план - план, удовлетворяющий системе ограниче­ний и условию неотрицательности). Рассмотрим только два из них: метод северо-западного угла и метод наименьшей стоимости.

Как уже отмечалось, в опорном плане не более ***r = m + n - 1*** пере­менных ,отличных от нуля. Если таких переменных равно ***r***, то такой план называют невырожденным, в противном случае - вырожденным.

***Метод северо-западного угла.***Назначение перевозок начинаем с левой верхней клетки (северо-западный угол). Сравнивая ресурсы поставщика и потребности потребителя, назначаем максимально возможную перевозку. Если ресурсов поставщика недостаточно, то переходим к следующему по­ставщику. Если ресурсов у поставщика достаточно, то назначив нужную перевозку первому потребителю, переходим к следующему потребителю. При назначении перевозок для удобства записываем остаток ресурсов (по­требностей); если ресурсы закончились или потребности удовлетворены, то ставим букву "к" (конец). Если при назначении перевозки одновременно закончились запасы ресурсов у поставщика и удовлетворены потребности потребителя, то из "игры" выводим только одного участника, другому ос­тавляем нуль запасов или нуль потребностей.

***Метод наименьшей стоимости.*** Выбираем клетку с наименьшей тариф­ной ставкой и назначаем максимально возможную перевозку. Если запасы закончились или потребности удовлетворены, то поставщика или потреби­теля исключаем. Среди оставшихся клеток снова выбираем клетку с наименьшей стоимостью и назначаем максимально возможную перевозку. Если в результате назначения перевозки закончились запасы поставщика или удовлетворены потребности потребителя, то его исключаем из даль­нейшего рассмотрения.

**Метод потенциалов построения оптимального плана.**

Наиболее простым методом решения ТЗ является метод потенциа­лов. Потенциалами называются условные числа  приписанные определенным образом каждому поставщику и потребителю.

***Теорема 3( условие оптимальности плана). Сумма потенциалов поставщика и потребителя равна тарифной ставке для занятых кле­ток; сумма потенциалов поставщика и потребителя не превышает тарифную ставку для свободных клеток:***



**Замечание.** Опорный план должен быть невырожденным.

***Алгоритм решения транспортной задачи:***

Строим начальные планы методом северо-западного угла и наи­меньшей стоимости, из них выбираем лучший.

Находим потенциалы поставщиков и потребителей, используя первое условие оптимальности плана: 

Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток . Если оно выполнено, то план оптимален. Если не выполнено, то улучшаем план.

4. Улучшение плана.

a) при невыполнении второго условия оптимальности плана в клетку заносим нарушение  сo знаком "+". Такие клетки называются потенциальными;

среди всех потенциальных клеток выбираем клетку с наибольшим нарушением;

строим для выбранной клетки замкнутый контур, состоя­щий из вертикальных и горизонтальных отрезков прямой, причем вершины контура лежат в занятых клетках, за исключением той клетки, для которой строится контур. Виды контуров приведены на рисунке 1;

Рис. 1 Виды контуров

вершины контура поочередно помечаем, знаками "+","-", начиная с клетки, для которой построен контур;

е) среди клеток, помеченных знаком "-", выбираем наименьшую перевозку. На эту величину увеличиваем перевозки в клетках, помеченных знаком "+", и уменьшаем вклетках, помеченных знаком "-". В результате переназначения перевозок освобождается одна клётка.

5.Вновь полученный план проверяем на оптимальность.

**Порядок выполнения заданий**

**Задание.** Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***а1, а2 и а3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| **А2** | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| **А3** | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| ***а1=200, а2=250, а3=200,***  ***b1=190, b2=100, b3=120, b4=110, b5=130.*** |  |

**Решение.**

1. Построим начальный план двумя методами: методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости, и выберем тот план, который будет наилучшим, то есть получим минимальные затраты за перевозку однородного груза.

А) Строим начальный план методом северо-западного угла. Составим таблицу значений:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** | Запасы |
| **А1** | 28  190 | 27  10 | 18 | 27 | 24 | 200, 10, к |
| **А2** | 18 | 26  90 | 27  120 | 32  40 | 21 | 250, 160, 40, к |
| **А3** | 27 | 33 | 23 | 31  70 | 34  130 | 200, 130, к |
| Потребности | 190, к | 100, 90, к | 120, к | 110, 70, к | 130, к | 650=650 |

Число назначенных перевозок ***m+n-1=3+5-1=7***, то есть начальный план

 невырожденный.

При таком плане суммарные транспортные издержки равны:



Б) Строим начальный план методом наименьшей стоимости. Составим таблицу значений:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители  Поставщики | **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** | Запасы |
| **А1** | 28 | 27  10 | 18  120 | 27 | 24  70 | 200, 80, 10, к |
| **А2** | 18  190 | 26 | 27 | 32 | 21  60 | 250, 60, к |
| **А3** | 27 | 33  90 | 23 | 31  110 | 34 | 200, 90, к |
| Потребности | 190, к | 100, 90, к | 120, к | 110, к | 130, 70, к | 650=650 |

Начальный план:



При таком плане транспортные издержки



Сравнивая транспортные издержки, видим, что план, построенный методом наименьшей стоимости, лучший.

2. Выбираем лучший план и находим потенциалы поставщиков и потребителей, используя первое условие оптимальности плана: 

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители,  Поставщики, | | **21** | **27** | **18** | **25** | **24** |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **0** | **А1** | 28 | 27  10 | 18  120 | 27 | 24  70 |
| **-3** | **А2** | 18  190 | 26 | 27 | 32 | 21  60 |
| **6** | **А3** | 27 | 33  90 | 23  **+1** | 31  110 | 34 |

Используя первое условие оптимальности плана, составим систему ли­нейных уравнений для определения потенциалов:



Система линейных уравнений содержит 7 уравнений и 8 неизвестных, т.е. она имеет множество решений. Так как нужно одно решение, то любой из неизвестных задаем значение и вычисляем остальные неизвестные.

■

Пусть , тогда



1. Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток . Если есть нарушения, то заносим их со знаком «+». В результате проверки получили одну потенциальную клетку. Таким образом, начальный план не оптимален.
2. Улучшение плана. Выбираем клетку с максимальным нарушением и для нее строим замкнутый контур.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители,  Поставщики, | |  |  |  |  |  |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
|  | **А1** | 28 | 27 +  10 | 18 **-**  120 | 27 | 24  70 |
|  | **А2** | 18  190 | 26 | 27 | 32 | 21  60 |
|  | **А3** | 27 | 33  - 90 | 23  **+1** | 31  110 | 34 |

Среди клеток, помеченных знаком «-», выбираем наименьшую перевозку:



На эту величину увеличиваем перевозки в клетках, помеченных знаком «+», и уменьшаем в клетках, помеченных знаком «-». В результате переназначения перевозок имеем план:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Потребители,  Поставщики, | | **21** | **27** | **18** | **26** | **24** |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **0** | **А1** | 28 | 27  100 | 18  30 | 27 | 24  70 |
| **-3** | **А2** | 18  190 | 26 | 27 | 32 | 21  60 |
| **5** | **А3** | 27 | 33 | 23  90 | 31  110 | 34 |

Используя первое условие оптимальности плана, составим систему ли­нейных уравнений для определения потенциалов:



Система линейных уравнений содержит 7 уравнений и 8 неизвестных, т.е. она имеет множество решений. Так как нужно одно решение, то любой из неизвестных задаем значение и вычисляем остальные неизвестные.

■

Пусть , тогда



Проверяем второе условие оптимальности плана для свободных клеток . Условие оптимальности выполнены, следовательно, план, соответствующий таблице, оптимален.





Ответ: Сравнивая три метода нахождения оптимального плана, делаем вывод, что метод потенциалов находит оптимальный план решения транспортной задачи, так как получили минимальные транспортные издержки равные 15080 единиц.

**Задания для самостоятельной работы**

**1 вариант.**

**Задача.** Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***а1, а2 и а3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| **А2** | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| **А3** | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| ***а1=200, а2=350, а3=300,***  ***b1=270, b2=130, b3=190, b4=150, b5=110.*** |  |

**2 вариант.**

**Задача.** Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***а1, а2 и а3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| **А2** | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| **А3** | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| ***а1=200, а2=300, а3=250,***  ***b1=210, b2=150, b3=120, b4=135, b5=135.*** |  |

**3 вариант.**

**Задача.** Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***а1, а2 и а3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| **А2** | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| **А3** | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| ***а1=230, а2=250, а3=170,***  ***b1=140, b2=90, b3=160, b4=110, b5=150.*** |  |

**4 вариант.**

**Задача.** Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***а1, а2 и а3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| **А2** | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| **А3** | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| ***а1=350, а2=200, а3=300,***  ***b1=170, b2=140, b3=200, b4=195, b5=145.*** |  |

**5 вариант.**

**Задача.** Имеются три пункта поставки однородного груза **А1, А2, А3** и пять пунктов **В1, В2, В3, В4, В5** потребления этого груза. На пунктах **А1, А2 и А3** находится груз соответственно в количестве ***а1, а2 и а3*** тонн. В пункты **В1, В2, В3, В4, В5** требуется доставить соответственно ***b1, b2, b3, b4, b5*** тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Пункты поставки** | **Пункты потребления** | | | | |
| **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** |
| **А1** | D11 | D12 | D13 | D14 | D15 |
| **А2** | D21 | D22 | D23 | D24 | D25 |
| **А3** | D31 | D32 | D33 | D34 | D35 |

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

|  |  |
| --- | --- |
| ***а1=300, а2=250, а3=200,***  ***b1=210, b2=150, b3=120, b4=135, b5=135.*** |  |

**Контрольные вопросы**

* 1. Какие задачи называются транспортными?
  2. В чем суть классической транспортной задачи?
  3. Что означает термин «транспортный тариф»?
  4. Как записывается условие баланса?
  5. Как выглядит математическая постановка транспортной задачи?
  6. В чем суть метода северо-западного угла?
  7. Основная идея метода наименьшей стоимости?
  8. В чем суть метода потенциалов?
  9. Какие клетки называются потенциальными?
  10. Какие виды контуров вы знаете?

# Индивидуальное домашнее задание 4

# Индивидуальное домашнее задание 5

**Тема**: Решение задачи нелинейного программирования графическим методом и методом множителей Лагранжа

**Цель работы:** Решить задачу нелинейного программирования графическим методом и методом множителей Лагранжа.

**Краткая теория**

**Задачами нелинейного программирования** называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Задачи нелинейного программирования можно классифицировать в соответствии с видом функции ***F(x)***, функциями ограничений и размерностью вектора х (вектора решений).

В самом общем виде классификация представлена в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вид *F(x)*** | **Вид функции ограничений** | **Число переменных** | **Название задачи** |
| Нелинейная | Отсутствуют | 1 | Безусловная однопараметрическая оптимизация |
| Нелинейная | Отсутствуют | Более 1 | Безусловная многопараметрическая оптимизация |
| Нелинейная или линейная | Нелинейные или линейные | Более 1 | Условная нелинейная оптимизация |

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует.   
В каждом конкретном случае способ выбирается в зависимости от вида функции ***F(x)***.   
Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

***Задачи нелинейного программирования*** относятся ***к трудным*** вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным **м*етодам оптимизации***. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

**Общая формулировка нелинейных задач:**

Найти переменные ***х1 , х2 , …, хn*** , удовлетворяющие системе уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ψ ( х1 , х2 , …, хn ) = bi , i = 1, 2, …, m*** | (1) |

и обращающие в максимум ( минимум ) целевую функцию

|  |  |
| --- | --- |
| ***Z = f ( х1 , х2 , …, хn )*** | (2) |

Примером типичной и простой нелинейной задачи является следующая:   
Данное предприятие для производства какого-то продукта расходует два средства в количестве ***х1*** и ***х2*** соответственно. Это факторы производства, например, машины и труд, два различных сырья и т.п., а величины ***х1*** и ***х2*** – затраты факторов производства. Факторы производства впредь будем считать взаимозаменяемыми. Если это «труд» и «машины», то можно применять такие методы производства, при которых величина затрат машин в сопоставлении с величиной затрат труда оказывается больше или меньше (производство более или менее трудоемкое).

Объем производства (выраженный в натуральных или стоимостных единицах) является функцией затрат производства ***Z = f ( х1 , х2 )***. Эта зависимость называется **производственной функцией**. Издержки зависят от расхода обоих факторов (***х1*** и ***х2***) и от цен этих факторов (***c1*** и ***c2***). Совокупные издержки выражаются формулой ***b = c1 х1 + c2 х2***. Требуется при данных совокупных издержках определить такое количество факторов производства, которое максимизирует объем продукции ***Z***.

Математическая модель этой задачи имеет вид: определить такие переменные ***х1*** и ***х2***, удовлетворяющие условиям

|  |  |
| --- | --- |
| ***c1 х1 + c2 х2 = b*** | (3) |

|  |  |
| --- | --- |
| ***х1 ≥ 0, х2 ≥ 0,*** | (4) |

при которых функция

|  |  |
| --- | --- |
| ***Z = f (х1, х2 )*** | (5) |

достигает максимума. Как правило, функция (5) может иметь произвольный нелинейный вид.

Использую классические методы оптимизации, следует четко представлять себе различие между ***локальным*** экстремумом функции, ***глобальным*** экстремумом и ***условным*** экстремумом. Понятие условного экстремума вводится для случая, когда число переменных n не меньше ***2 (n ≥ 2)***. Будем полагать, что функция ***Z = f ( х1 , х2 , …, хn ) = f (X)*** дважды дифференцируема в точке ***Х\* = (х1 \*, х2 \*, …, хn\* )***, ***(Х\* € D(f))*** и в некоторой ее окрестности.

Если для всех точек ***Х*** этой окрестности ***f (X\*) ≥ f (X)*** или ***f (X\*) ≤ f (X)***, то говорят, что функция ***f (X)*** имеет экстремум в ***X\**** (соответственно максимум или минимум).

Точка ***X\**** , в которой все частные производные функции ***Z = f (Х)*** равны 0, называется **стационарной точкой**.

**Необходимое условие экстремума.**

Если в точке ***X\**** функция ***Z = f (Х)*** имеет экстремум, то частные производные функции в этой точке равны 0:

***f 'x1 (X\*) = 0, i = 1, 2, ..., n.***

Следовательно, точки экстремума функции ***Z = f (Х)*** удовлетворяют системе уравнений:

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_9_1 | (6) |

Для получения достаточных условий следует определить в стационарной точке знак дифференциала второго порядка. Дифференциала второго порядка обозначается ***d2f (х1 , х2 , …, хn ) f 'x1 (X)*** найти частную производную по переменной ***хj*** , то получим частную производную второго порядка по переменным ***хi*** , ***хj*** , которая обозначается ***f ''xi, xj (X)***. В этом случае

example_2_9_2

**Достаточные условия экстремума.**

Двух переменных:

* если ***Δ > 0*** и ***а11 < 0 (а22 < 0)***, то в точке ***Х 0*** функция имеет максимум:   
  если ***Δ > 0*** и ***а11 > 0 (а22 > 0)***,то в точке ***Х 0*** – минимум (в этих случаях ***Х 0 = Х\****);
* если ***Δ < 0***, то экстремума нет;
* если ***Δ = 0***, то вопрос об экстремуме остается открытым.

**Метод множителей Лагранжа**

Способ определения условного экстремума начинается с построения вспомогательной функции Лагранжа, которая в области допустимых решений достигает максимума для тех же значений переменных ***x1, x2, ..., xn***, что и целевая функция ***z***.  
Пусть решается задача определения условного экстремума функции ***z = f (X)*** при ограничениях ***φi (x1, x2, ..., xn ) = 0, i = 1, 2, ..., m, m < n***

Составим функцию

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_10_13 | (7) |

которая называется *функцией Лагранжа*. ***X***, — постоянные множители (*множители Лагранжа*). Отметим, что множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Если ***f (x1, x2, ..., xn )*** — доход, соответствующий плану ***X = (x1, x2, ..., xn )***, а функция ***φi (x1, x2, ..., xn )*** — издержки i-го ресурса, соответствующие этому плану, то ***X***, — цена (оценка) i-го ресурса, характеризующая изменение экстремального значения целевой функции в зависимости от изменения размера i-го ресурса (маргинальная оценка). ***L(Х)*** — функция ***n + m*** переменных ***(x1, x2, ..., xn , λ1, λ2, ..., λn )***. Определение стационарных точек этой функции приводит к решению системы уравнений

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_10_14 | (8) |

Легко заметить, что *example_2_10_15*. Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции ***z = f (X)*** сводится к нахождению локального экстремума функции ***L(X)***. Если стационарная точка найдена, то вопрос о существовании экстремума в простейших случаях решается на основании достаточных условий экстремума — исследования знака второго дифференциала ***d2L(X)*** в стационарной точке при условии, что переменные приращения ***Δxi*** - связаны соотношениями

|  |  |
| --- | --- |
| example_2_10_16 | (9) |

полученными путем дифференцирования уравнений связи.

**Решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными**

**с помощью средства *Поиск решения***

Настройка **Поиск решения** позволяет находить решение систе­мы нелинейных уравнений с двумя неизвестными:



где - нелинейная функция от переменных ***x*** и ***y***, - произвольная постоянная.

Известно, что пара (***x, y***) является решением системы уравнений (10) тогда и только тогда, когда она является решением следующего уравнение с двумя неизвестными:



*С* другой стороны, решение системы (10) — это точки пересечения двух кривых: *f](x,y) = C* и *f2(х, у) = С2* на плоскости *ХОY.*

Из этого следует метод нахождения корней системы. нелинейных уравнений:

1. Определить (хотя бы приближенно) интервал существования решения системы уравнений (10) или уравнения (11). Здесь не­обходимо учитывать вид уравнений, входящих в систему, область определения каждого их уравнений и т. п. Иногда применяется подбор начального приближения решения;
2. Протабулировать решение уравнения (11) по переменным x и y на выбранном интервале, либо построить графики функций *f1(x,y) =* С, и *f2(х,у) = С2* (система(10)).
3. Локализовать предполагаемые корни системы уравнений — найти несколько минимальных значений из таблицы табулирование­ корней уравнения (11), либо определить точки пересечения кривых, входящих в систему (10).

4. Найти корни для системы уравнений (10) с помощью надстройки **Поиск решения.**

**Порядок выполнения заданий**

**Задача.** Решить систему нелинейных уравнений:



**Решение:**

Легко видеть, что решение системы уравнений являются точки пересечения окружности (с радиусом 2 и центром (1,-1)) и прямой .

Данную систему заменим равносильным уравнением:

, для которого будем искать решения с площадью надстройки **Поиск решения**.

Исходя из графиков уравнений, интервал локализации корней определим в границах от -3 до 3 (рис. 1). Ячейка **В3:В43** содержат значения Х. Формулы для построения графиков:

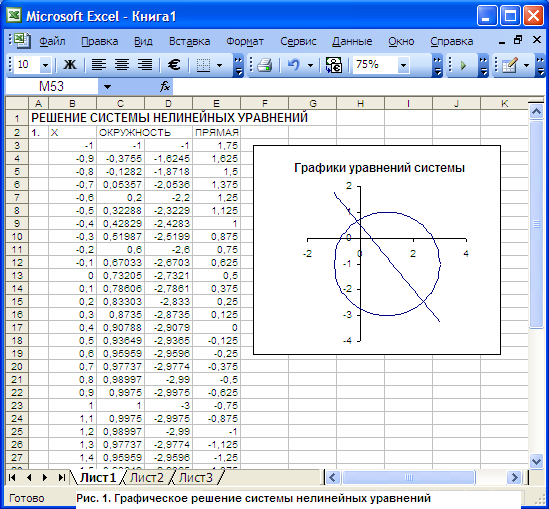
В ячейке **С3**:

=-1+корень(4-(В3-1)^2)

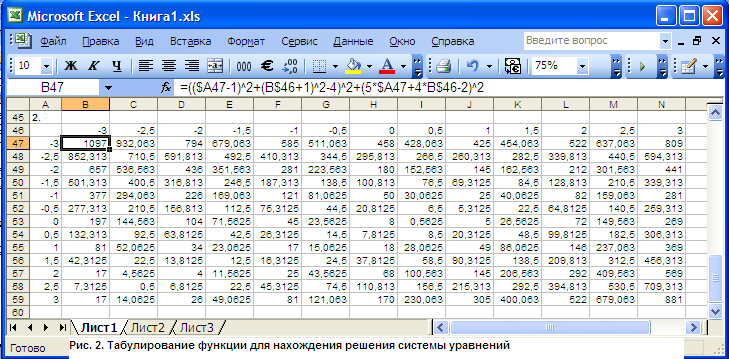
В ячейке **D3**:

=-1-корень(4-(В3-1)^2)

В ячейке **Е3**:

=(2-5\*В3)/4

1. Табулируем равносильное уравнение на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5 (рис. 2).



Локализируем корни равносильного уравнения (рис. 3):

Ячейки **А47:А59** содержат значения X на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5;

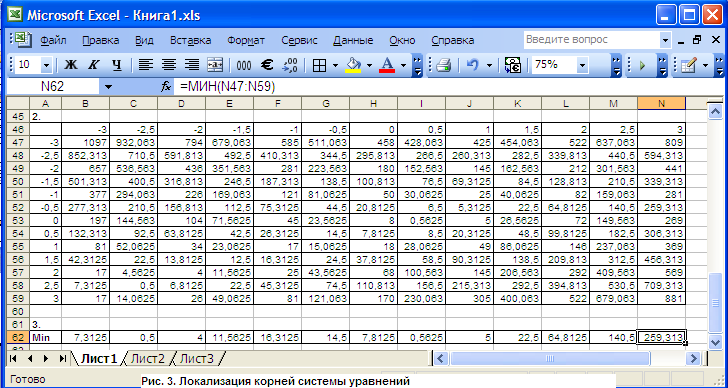
Ячейки **B46:N46** содержат значения Y на отрезке [-3; 3] с шагом 0,5;

Формула для ячейки **В47** (копируется на диапазон **B47:N59**):

=(($A47-1)^2+(B$46+1)^2-4)^2+(5\*$A47+4\*B$46-2)^2

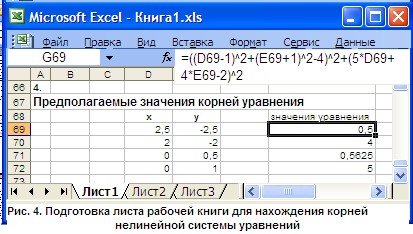
Формула для ячейки **В62** (копируется на диапазон **B62:N62**):

=МИН(В47:В59)

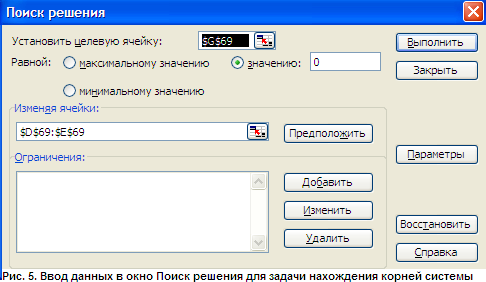
 Исходя из результатов вычислений, определим следующие пары предполагаемых корней уравнения: (2,5; -2,5), (2; -2), (0; 0,5), (0; 1).

Найдем корни равносильного уравнения (рис. 4) – для этого поместим пары значений для предполагаемых корней в ячейки **D69:E72**. В ячейку G69 введем формулу для равносильного уравнения (копируется на диапазон **G69:G72**):

=((D69-1)^2+(E69+1)^2-4)^2+(5\*D69+4\*E69-2)^2



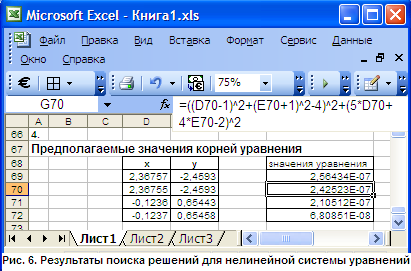
С помощью надстройки Поиск решения (в окне Параметры поиска решения флажок Линейная модель должен быть снят) установим необходимые параметры для поиска корня равносильного уравнения (рис. 5),



Затем выполним поиск решения. Процедуру повторим для всех имеющихся пар корней.

Результаты поиска решения (рис. 6) позволяют делать вывод о том, что система имеет 2 решения:

(2,3675745729901; -2,45934248863711) и (-0,123564081639673; 0,654434224216163)



**Задания для самостоятельной работы**

**1 вариант.**

**Задача.** Решить систему нелинейных уравнений:



**2 вариант.**

**Задача.** Решить систему нелинейных уравнений:



**3 вариант.**

**Задача.** Решить систему нелинейных уравнений:



**4 вариант.**

**Задача.** Решить систему нелинейных уравнений:



**5 вариант.**

**Задача.** Решить систему нелинейных уравнений:



**Контрольные вопросы**

1. Какие задачи называются задачами нелинейного программирования?
2. Как записывается общая формулировка нелинейных задач?
3. Как выглядит классификация задач нелинейного программирования?
4. В чем суть метода множителей Лагранжа?
5. Какие способы решения нелинейных задач вы знаете?

# Индивидуальное домашнее задание 6

**Тема:** Решение задачи динамического программирования

**Цель работы:** Решить простейшие задачи методом динамического программирования.

**Краткая теория**

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный, к задачам, в которых процесс принятия решения может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Такие задачи называются многошаговыми.

Характерные особенности задач динамического программирования:

Неоднозначность решения.

Возможность деления вычислительного процесса на этапы.

Общий критерий – сумма частных критериев на этапах.

Динамическое программирование позволяет осуществлять опти­мальное планирование многошаговых процессов, зависящих от времени. Процесс называется управляемым, если можно влиять на ход его развития. Управлением называется совокупность решений, принимаемых на каждом этапе для влияния на ход процесса. Началом этапа (шага) управляемого процесса считается момент принятия решения. Планируя многошаговый процесс, исходят из интересов всего процесса в целом, всегда необходимо иметь в виду конечную цель.

Метод динамического программирования состоит в том, что опти­мальное управление строится постепенно. На каждом этапе оптимизируется управление только этого этапа, причем управление выбирается с учётом последствий, т.е. оптимальное управление для данного этапа должно учитывать весь последующий ход процесса, для чего необходимо знать все управления на последующих этапах. Поскольку процесс заканчивается на последнем этапе, оптимальное решение не должно учитывать последующего управления. Таким образом, процесс вычисления протекает в обратном направлении, от конца к началу.

**Постановка задачи динамического программирования.**

Пусть  - состояния системы на начальном, *k-ом* и конечном этапе, *-* управления системой на начальном, *k-ом* и конеч­ном этапах. Управление переводит систему из состояния  в со­стояние . Показатель эффективности на *k-ом* этапе обозначим через .

Так как оптимизацию показателя эффективности начинаем с последнего этапа, то, зная максимум показателя эффективности на *п-*ом шаге



найдем максимум показателя эффективности на *(п-1)-* ом шаге

,

где называется "сиюминутной" выгодой на *(п-1)-* ом шаге.

Основное функциональное уравнение динамического программирования (уравнение Беллмана) имеет вид:



Принцип оптимальности Беллмана можно сформулировать следую­щим образом: каковы бы не были начальное состояние и начальное реше­ние, последующее решение должно быть оптимальным по отношению к состоянию, полученному в результате начального решения. Иными слова­ми, принцип оптимальности утверждает, что если в данный момент выбра­но не наилучшее решение, то последствия этого нельзя исправить в буду­щем.

**Задача определения кратчайших расстояний по заданной сети**

Пусть дано конечное число точек *,* соединенных всевоз­можными отрезками линий, называемых звеньями или связями. Тогда совокупность точек и их связей называют сетью. Сеть называется достаточно связанной, если существует путь, состоящий из звеньев и соединяющий любые две точки сети. Пусть каждому звену поставлено в соответствие действительное неотрицательное число  - его длина. Необходимо определить кратчайшее расстояние по сети от каждой точки до всех остальных и соответствующие пути, по которым, они проходят. Пронумеруем точки сети в любом порядке и укажем длину каждого звена. Две точки называ­ются соседними, если они непосредственно соединены связью. Положим, .

Для решения задачи используем метод динамического программирования и отыскиваем кратчайшее расстояние неот фиксированной точки  
до всех остальных, а от всех остальных до фиксированной через соседние  
точки. Связь, через которую проходит кратчайшее расстояние, после каж­дого шага отмечаем стрелкой. Для удобства точки сети обозначим кружками с номерами точек.

***Алгоритм решения:***

Фиксируем конечную точку , до которой необходимо рассчитать кратчайшее расстояние от всех остальных, и рядом с этой точкой записываем нуль, т.к. расстояние  от точки до ней самой равно 0.Это число, отличное от нуля, для других точек, назовём характеристикой точки.

Определим соседние точки по формуле  и на связях, соединяющих эти точки, поставим стрелки, направленные в точку . После этого точку  отметим символом v, обозначающим, что операции над ней закончены.

Переходим к любой соседней точке, для которой характеристика уже найдена. Пусть это будет точка . Определяем соседние с ней точки и подсчитываем характеристики этих точек по формуле .

При определении  для соседних  может оказаться, что для не­которых из них характеристики  уже известны. В этом случае новую характеристику  сравниваем со старой характеристикой .

Если , то старую характеристику оставляем без изменений.

Если , то старую характеристику заменяем на новую, соответственно происходит или не происходит изменение направления.

Точку  отмечаем символом v, если соседняя точка, у которой изменилась характеристика, не была ранее отмечена v. Если же точка ранее была отмечена символом v, то пересчитываем характеристики соседних с ней точек.

Переходим к пункту 3.

Процесс продолжаем до тех пор, пока не будут отмечены символом v все точки сети. Ответ выписываем в виде таблицы, где указаны кратчайшее расстояние от всех точек до конечной и пункты, через которые они проходят.

**Порядок выполнения заданий**

**Задача 1.** Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено  еди­ниц средств. Каждый квартал предприятие А получает х средств, предприятие В - у средств. При этом от выделенных средств предприятие А полу­чает 5х единиц и остаток средств 0,3х единиц, а предприятие В - доход 4у единиц и остаток выделенных средств 0,5у единиц. Необходимо распреде­лить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

**Решение.** Период времени 1 год разделим на 4 квартала (4 этапа).

Введем обозначения: через  обозначим вклад в развитие предприятий А и В в 1-ом квартале,  - доход за i-ый квартал, - оста­ток средств на конец i-ого квартала, i – 1,2,3,4.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Состояние | Вклад | | Доход | Остаток |
| А | В |
| 1 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |

С учетом введенных обозначений составим подробную таблицу по этапам.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Предприятие | 1 квартал | | | 2 квартал | | | 3 квартал | | | 4 квартал | |
| вклад | доход | остаток | вклад | доход | остаток | вклад | доход | остаток | вклад | доход |
| А |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| В |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | ***S0=x1+y1*** | ***W1=5x1+4y1*** | ***S1=0,3x1+0,5y1*** | ***S1=x2+y2*** | ***W2=5x2+4y2*** | ***S2=0,3x2+0,5y2*** | ***S2=x3+y3*** | ***W3=5x3+4y3*** | ***S3=0,3x3+0,5y3*** | ***S3=x4+y4*** | ***W4=5x4+4y4*** |

Отыскание оптимального управления начнем с 4 квартала.



3 квартал.

Так как максимум дохода за 3-4 кварталы постоянен при любом распределении средств, то пусть .

2 квартал.

1 квартал.

По условию задачи  единиц,  единиц, при этом будем иметь следующие распределение средств по кварталам:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Квартал | Распределяемые средства | Вклады | |
| А | В |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |

**Задача 2.** Дана сеть, состоящая из 7 точек, и известны расстояния между точками. Необходимо определить кратчайшее расстояние от любой точки до точки 7.

**Решение.**

0 V

12 7 V

7 V

3 V

5 V

10 V

9 6 V

3

5

3

7

4

2

3

5

2

5

Рассмотрим точку 7.Рядом с кружком ставим 0 характеристику этой точки.

Соседними с точкой 7 являются точки 6,5,4. Подсчитаем характеристики этих точек и укажем направления. Точку 7 отмечаем символом V , т.к. операции на ней закончены.

Рассмотрим точку 4. Соседними с ней будут точки 6,3,1,7, Находим характеристики каждой из них. Характеристики точек 1 и 3 – соот­ветственно 9 и 12. Характеристики точек 6,7 остались без изменения, так как 7+4=11>5, 7+7=14>0. Точку 4 отметим символом V. Рассмотрим точку 6. Соседними являются точки 3,4,7. Для точки 3 новая характеристика 5+2=7>1*2,* поэтому изменяем старую характеристику 12 на 7, и указываем новое направление. Для точек 4,7 старые характери­стики остаются без изменений, т.к. 5+4=9>7, 5+5=10>0. Точку 6 от­мечаем знаком V. Рассмотрим точку 5. Соседняя с ней точка 1. Новая характеристика 3+3=6<9, поэтому изменяем характеристику и направление. Точку 5 отмечаем символом V. Точка 1, характеристика  
которой изменилась, является соседней с точкой 4. Точка 4 отмечена символом V, поэтому пересчитываем характеристику этой точки и проверяем соседние с ней: 7+5=12>7; 7+4=11>5; 7+7=14>0. Характеристики точек 3,6,7 остаются без изменений.

Рассмотрим точку 3. Соседними являются точки 2,4,6. Характеристика 2: 7+3=10, записываем эту характеристику и указываем на­правление. Характеристики 6,4 остались без изменения. Точку 3 отмечаем символом V*.*

Рассмотрим точку 2. Соседними являются точки 1 и 3. Характери­стики точек не изменяются, т.к. 10+5=15>б, 10+3=13>7. Точку 2 от­мечаем символом V.

Рассмотрим точку 1. Соседними являются точки 2,4,5. Характери­стики точек не изменились, т.к. 6+5=11>10, 6+2=8>4, 6+3=9>3. Операции над всеми точками закончены. Ответ запишем в виде таблицы.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номера точек, между которыми рассчитывается расстояние | Кратчайшее расстояние | Маршрут, по которому проходит кратчайшее расстояние |
| 1-7 | 6 | 1-5-7 |
| 2-7 | 10 | 2-3-6-7 |
| 3-7 | 7 | 3-6-7 |
| 4-7 | 7 | 4-7 |
| 5-7 | 3 | 5-7 |
| 6-7 | 5 | 6-7 |
| 7-7 | 0 |  |

**Задания для самостоятельной работы**

**1 вариант.**

**Задача 1.** Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество х средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход 2х и уменьшается до 0,6х. Количество у средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход 3у и уменьшается до 0,2у. Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве  единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

**Задача 2.** По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.

10

3

7

18

3

11

10

3

10

3

4

8

9

10

12

4

5

6

**2 вариант.**

**Задача 1.** Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено  еди­ниц средств. Каждый квартал предприятие А получает х средств, предприятие В - у средств. При этом от выделенных средств предприятие А полу­чает 4х единиц и остаток средств 0,3х единиц, а предприятие В - доход 5у единиц и остаток выделенных средств 0,1у единиц. Необходимо распреде­лить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

**Задача 2.** По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.

8

4

9

19

4

8

12

4

12

4

5

3

11

12

11

5

7

3

**3 вариант.**

**Задача 1.** Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество х средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход 5х и уменьшается до 0,1х. Количество у средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход 3у и уменьшается до 0,5у. Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве  единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

**Задача 2.** По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.

12

5

5

20

3

11

15

2

10

5

3

4

10

10

12

3

9

4

**4 вариант.**

**Задача 1.** Двум предприятиям А и В на 4 квартала выделено  еди­ниц средств. Каждый квартал предприятие А получает х средств, предприятие В - у средств. При этом от выделенных средств предприятие А полу­чает 4х единиц и остаток средств 0,3х единиц, а предприятие В - доход 3у единиц и остаток выделенных средств 0,6у единиц. Необходимо распреде­лить средства между предприятиями поквартально таким образом, чтобы за весь год оба предприятия получили максимальный доход.

**Задача 2.** По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.

9

3

9

21

6

10

11

2

10

4

4

7

10

9

6

2

8

5

**5 вариант.**

**Задача 1.** Планируется работа двух отраслей производства А и В на 4 года. Количество х средств, вложенных в отрасль А, позволяет получить доход 5х и уменьшается до 0,3х. Количество у средств, вложенных в отрасль В, позволяет получить доход 6у и уменьшается до 0,1у. Необходимо распределить выделенные ресурсы в количестве  единиц между отраслями по годам планируемого периода для получения максимальной прибыли за весь период.

**Задача 2.** По заданной схеме, соединяющей 10 точек, найти кратчайшее расстояние от 1 точки до 10.

7

3

8

19

4

8

13

4

12

5

5

8

12

5

5

3

6

2

**Контрольные вопросы**

1. Что называется динамическим программированием?
2. Какие характерные особенности задач динамического программирования вы знаете?
3. Что называется управлением?
4. В чем состоит метод динамического программирования?
5. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана?
6. Что называется сетью, звеньями?
7. Что такое характеристика точки?
8. Опишите алгоритм решения задачи определения кратчайшего расстояния по заданной сети?

# Индивидуальное домашнее задание 7

**Тема**: Сетевые модели

**Цель работы**: Закремить уиения

**Краткая теория**

Сетевая модель представляет собой графическое изображение технологической последовательности и связи событий, которые пред­ставляют собой результат одной или нескольких работ.

Событие не может быть выражено во времени - оно представля­ет собой окончание входящей в него работы.

В сетевой модели событие изображается кружком с указанием в нем номера события.

Работа представляет собой любой процесс, предшествующий свершению события. Работа в сетевой модели изображается стрелкой.

Различают:

* работу действительную, т.е. требующую затрат труда и времени;
* работу-ожидание, требующую только затрат времени;
* работу фиктивную – логическую связь между двумя события­ми, указывающую, что данные, полученные при свершении предшествующего события, необходимы для свершения последующего собы­тия. При этом затрат времени и ресурсов не происходит. Фиктивная работа изображается прерывистой стрелкой.

Все работы через промежуточные события ведут к завершаю­щему событию, которое означает достижение цели, намеченной в про­грамме.

Любая непрерывная последовательность работ и событий обра­зует пути сетевой модели.

**Критический путь** - это полный путь (от исходного до завер­шающего события) максимальной продолжительности.

**2. Правила построения топологии сетевой модели**

Схематическое изображение событий и работ, показывающее их взаимосвязи, образует топологическую модель процесса разработки.

Во избежание ошибок и связанных с ними дальнейших непра­вильных решений при построении сетевой модели необходимо со­блюдать следующие правила:

Сетевая модель строится слева направо: от исходного собы­тия к завершающему.

Длина стрелки, изображающей работу, не выражает продол­жительности выполнения работы (модель строится вне масштаба)

Ожидаемая продолжительность работы проставляется в соот­ветствующих временных оценках (днях, неделях) над стрелкой.

Нецелесообразно изображать на модели работы продолжи­тельностью менее принятой единицы измерения (одного дня, одной недели), т.к. такая детализация затрудняет текущее управление по сети.

Работы кодируются номерами начального (iго) и конечного (jгo) события, причем код jгo события работы не может быть меньше кода iго события работы.

В сетевой модели не должно быть ни одного события, кроме исходного, в которое не входила бы ни одна работа.

В сетевой модели не должно быть ни одного события, кроме завершающего, из которого не выходила бы ни одна работа.

На сетевой модели не должно быть работ с одинаковыми ко­дами, т.е. с общими начальным и конечным событиями. Если работы Aк (к = 1, 2 ..., n) начинаются и заканчиваются общими для данныхработ событиями (рис.1), то для того, чтобы все эти работы имелиразличные коды, в сетевую модель необходимо ввести (n-1) фиктив­ных работ Bt (t = l ,2..., n-1) (рис. 2)

При построении сетевой модели следует по возможности из­бегать пересечения стрелок.

**Untitled-1.wmf**

**3. Определение продолжительности работ**

Одним из наиболее важных этапов составления сетевой модели является получение правильных оценок продолжительности работ. Продолжительности работ могут быть определены либо по имеющим­ся нормативам, либо с использованием экспертных вероятностных оценок.

Формулы для определения ожидаемой продолжительности ра­бот вторым методом в зависимости от количества экспертных оценок представлены в табл.1.

Таблица 1 – **Расчетные зависимости для установления ожидаемой продол­жительности выполнения работ и ее дисперсии на основе экспертных оценок**

|  |  |
| --- | --- |
| **Наименование параметра** | **Формула расчета** |
| Ожидаемая продолжительность вы­полнения работы  на основе трех экспертных оценок |  |
| Ожидаемая продолжительность вы­полнения работы  на основе двух экспертных оценок |  |
| Дисперсия (мера разброса) ожидае­мой  продолжительности работы при трех оценках |  |
| Дисперсия (мера разброса) ожидае­мой  продолжительности работы при двух оценках |  |

Условные обозначения к таблице:

**tmin** – минимальная продолжительность работы, выбранная из условия, что выполнение работы будет протекать при наиболее благоприятных обстоятельствах;

**tнв** – наиболее вероятная продолжительность работы, выбранная при средних условиях, при которых не возникает никаких неожиданных трудностей;

**tmax** – максимальная продолжительность работы, выбранная из условия выполнения данной работы при самом неблагоприятном стечении об­стоятельств.

1. **Расчет параметров сетевой модели**

К основным параметрам сетевой модели относятся характери­стики событий, работ, резервы времени событий и работ. Эти пара­метры являются исходными для получения ряда дополнительных ха­рактеристик, а также для анализа сети или составления плана разра­ботки.

При небольших размерностях сетевой модели (до 100 событий) рассчитываются графическим методом параметры событий, а при больших - табличным методом параметры работ.

Порядок расчета параметров событий

Расчету подлежат следующие параметры:

**Тр** – наиболее ранний возможный срок свершения события;

**Тп** – наиболее поздний допустимый срок свершения события;

**R** – резерв времени события.

Расчет выполняется непосредственно на модели. В этом случае событие изображается кружком диаметром 15- 20 мм, разделенным на четыре сектора (рис. 3). Буквой **N** обозначен номер события.

Untitled-2.wmf

Расчет выполняется по следующим правилам:

Осуществляется проход сетевой модели от исходного собы­тия к завершающему и последовательно определяются ранние срокисвершения событий по формуле:

**Тpj = max (Tpi + tij) ,**

где **tij** - ожидаемое время выполнения работы **ij**.

При этом ранний срок свершения исходного события принима­ется равным нулю: Тро = 0.

Поздний срок свершения завершающего события принимает­ся равным полученному значению его раннего срока свершения:

Tпз = Tрз

Этот срок определяет длину критического пути сетевой модели (Ткр).

Осуществляется проход сетевой модели от завершающего со­бытия к исходному и последовательно определяются поздние срокисвершения событий по формуле:

Tпi = min (Тпj - tij)

Необходимо обратить внимание на то, что полученное в резуль­тате расчета значение позднего срока свершения исходного события должно быть равно нулю:

Tпo = Tрo = 0

Рассчитываются резервы времени всех событий сетевой мо­дели по формуле:

Ri = Tпi - Tрi

Выделяется на сетевой модели (предпочтительно красным цветом) критический путь, как непрерывная последовательность работ от исходного события до завершающего с нулевыми резервами вре­мени событий

Порядок расчета параметров работ

Основными параметрами работ являются:

**tpн** – раннее начало работы;

**tpo** – раннее окончание работы;

**tпн** – позднее начало работы;

**tпo** – позднее окончание работы;

**Rп** – полный резерв времени работы.

Расчет параметров выполняется в таблице (форма 1) по сле­дующим правилам:

Все работы в виде их кодов (**i, j**) заносятся в форму 1, графы 1 и 2 строго в порядке возрастания кодов сверху вниз. Для всех работ в графах 4, 7 записывается их продолжительность (**tij**).

Раннее начало (**tpнij**) работ, выходящих из исходного события, приравнивается к нулю (в графе 3 проставляется нуль во всех строках, содержащих в графе 1 номер исходного события)

Раннее окончание работы **tpоij** определяется по формуле

**tpоij = tpнij + tij**

Для последующих работ выполняется следующая процедура. Выбираются все работы, входящие в начальное событие данной рабо­ты (с номерами конечных событий, совпадающими с номером началь­ного события данной работы). Для этих работ просматриваются зна­чения их раннего окончания (графа 5) и максимальное из этих значе­ний переносится в графу раннего начала данной работы (графа 3). Раннее окончание данной работы рассчитывается по приведенной выше формуле. Расчет ранних начал и окончаний работ выполняется сверху вниз.

Позднее окончание работ, входящих в завершающее событие сетевой модели, приравнивается к максимальному раннему сроку их окончания, т.е. **tпоij зав = max {tpоij зав}** и переносится из графы 5 в графу 8 для всех строк, содержащих в графе 2 номер завершающего события. Этот срок также определяет длину критического пути (**Ткр**).

Время позднего начала работы определяется по формуле:

**tпнij = tпоij - tij**

Позднее окончание всех предыдущих работ определяется по таблице снизу вверх. Для определения позднего окончания данной ра­боты рассматриваются все работы, выходящие из конечного события данной работы (с номерами начальных событий, совпадающими с но­мером конечного события данной работы). Из графы поздних начал (графа 6) выходящих работ выбирается минимальное время позднего начала, которое переносится в графу позднего окончания (графа 8) данной работы. Позднее начало данной работы определяется по вы­шеуказанной формуле.

Полный резерв времени работы определяется по формуле

**Rпij = tпоij - tpоij**

Для каждой работы, написанной в форме 1, из знамения в графе 8 вычитается значение графы 5 и заносится в графу 9. Работы, имею­щие **Rпij = 0**, лежат на критическом пути сетевой модели.

Форма 1

Расчет параметров сетевой модели

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Работа | | **tрнij** | **tij** | **tроij** | **tпнij** | **tij** | **tпоij** | **Rпij** |  |
| **i** | **j** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. **Анализ и оптимизация сетевой модели**

На этом этапе выполняется анализ созданной модели и прини­маются меры для ее оптимизации. Вопрос о необходимости оптими­зации сетевой модели по времени решается в зависимости от знамения вероятности выполнения завершающего события (**Рк**) в директивный срок.

Для определения знамения вероятности **Рк** рассчитывают:

дисперсию продолжительности работ, лежащих на критиче­ском пути

 (см. табл. 1)

значение аргумента функции нормального распределения ве­роятностей

,

где **Тд** - заданный директивный срок выполнения разработки;

по значению аргумента **Z** в таблице 2 находится значение ве­роятности **Рк**.

Если значение **Рк** лежит в пределах 0,35 - 0,65, то можно счи­тать, что разработка уложится в директивный срок.

Если значение **Рк** выходит за пределы указанных границ - сете­вая модель требует оптимизации.

При выходе значения **Рк** за левую границу оптимизация должна быть направлена на сокращение длительности критического пути.

Сократить продолжительность критического пути можно сле­дующим образом:

изменением топологии модели с целью замены последова­тельного выполнения работ параллельным там, где это допускается характером технологии и организационных условий выполнения ра­бот;

перераспределением ресурсов между работами сетевой моде­ли, состоящим в том, что часть ресурсов (рабочая сила, оборудование, финансовые средства и т.п.) снимается с работ, не принадлежащих критическому пути и имеющих большие резервы времени, и распре­деляется на работы критического пути, сокращая их продолжитель­ность;

ужесточением оценок продолжительностей работ.

Выход значения **Рк** за правую границу означает избыток резер­вов времени выполнения работ и возможность сокращения их про­должительности.

Таблица 2 – Значения функции Рк

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Z** | **Рк** | Z | **Рк** | **Z** | **Рк** |
| 0,0  0,1  0,2  0,3  0,4  0,5  0,6  0,7  0,8  0,9  1,0  1,1  1,2  1,3  1,4  1,5  1,6  1,7  1,8  1,9  2,0 | 0,5000  0,5398  0,5793  0,6179  0,6554  0,6915  0,7257  0,7580  0,7881  0,8159  0,8413  0,8643  0,8849  0,9032  0,9192  0,9332  0,9452  0,9554  0,9641  0,9713  0,9772 | 2,1  2,2  2,3  2,4  2,5  2,6  2,7  2,8  2,9  3,0  -3,0  -2,9  -2,8  -2,7  -2,6  -2,5  -2,4  -2,3  -2,2  -2,1  -2,0 | 0,9821  0,9861  0,9893  0,9918  0,9938  0,9953  0,9965  0,9974  0,9981  0,9987  0,0013  0,0019  0,0026  0,0035  0,0047  0,0062  0,0082  0,0107  0,0139  0,0179  0,0228 | -1,9  -1,8  -1,7  -1,6  -1,5  -1,4  -1,3  -1,2  -1  -1,0  -0,9  -0,8  -0,7  -0,6  -0,5  -0,4  -0,3  -0,2  -0,1  0,0 | 0,0287  0,0359  0,0446  0,0548  0,0668  0,0898  0,0968  0,1151  0,1357  0,1587  0,1841  0,2119  0,2420  0,2743  0,3085  0,3446  0,3821  0,4207  0,4602  0,5000 |

1. **Построение календарного графика распределения работ**

Календарное распределение работ решает следующие задачи:

определение календарных сроков выполнения работ для кон­троля их соблюдения;

выявление календарного распределения загрузки персонала во времени и выравнивание ее за счет варьирования сроками выполнения работ, лежащих на ненапряженных путях.

Решение первой задачи осуществляется путем построения ка­лендарного графика, возможный вариант которого приводится в фор­ме 2. На графике двойными линиями показаны работы, лежащие на критическом пути. Все остальные пути (ненапряженные) показаны по обе стороны от критического. Над линией работы указывается коли­чество дней или недель, соответствующих ожидаемой продолжитель­ности ее выполнения. Под линией работы в кодированном виде при­водится перечень участвующих в ней исполнителей. Код имеет двой­ственную расшифровку: место в коде определяет профессию испол­нителя, значение кода - количество исполнителей данной профессии. Наиболее распространенное построение кода имеет следующий вид: на первом месте слева направо - конструкторы, на втором - техноло­ги, на третьем - исследователи, на четвертом - рабочие. Например, код 1213 расшифровывается так: один конструктор; два технолога; один исследователь; трое рабочих.

Рассмотрим пример построения календарного графика (см. форму 2). Критический путь, вытянутый в прямую линию, занимает 15 недель. Заметим, что на одни и те же события опираются части не­напряженных и критических путей, которые имеют различную про­должительность. Так, на события 3 и 8 опирается участок критическо­го пути 3, 4, 8 и участок ненапряженного пути 3, 5, 8. Суммарная про­должительность работ (3, 5) и (5, 8) меньше продолжительности работ (3, 4) и (4, 8). Поэтому на ненапряженном пути имеется резерв времени. Часть календарного периода, в течение которого выполняется ра­бота, показывается сплошной линией, остальное время, т.е. резерв по­казывается штриховой линией (см. работу 5, 8).

В соответствии с установленными календарными сроками вы­полнения работ должна определяться и, если необходимо, выравни­ваться загрузка всех исполнителей, однако в рамках одной темы (раз­работки) получить полную загрузку всего персонала невозможно. По­этому в данной работе загрузка исполнителей не рассчитывается.

Форма 2 – Календарный график распределения работ

**Календарь (недели)**

Untitled-3.wmf

Исходные данные для решения задачи включают:

* Перечень работ по разработке проекта со значениями оценок их продолжительности (табл. 3).
* Директивный срок разработки проекта.
* Число исполнителей для выполнения отдельных работ.

Задача решается в следующем порядке:

* На основании заданного в исходных данных перечня работ по разработке проекта установить логическую последовательность их выполнения и построить в соответствии с правилами сетевую модель.
* На основании заданных оценок продолжительностей работ рассчитать ожидаемые продолжительности и их дисперсии. Расчеты оформлять по форме табл.3.
* Определить расчетные параметры сетевой модели графиче­ ским и табличным методами.
* Определить вероятность выполнения разработки в заданный директивный срок.
* Проанализировать полученную сетевую модель и принять решение о необходимости ее оптимизации. Наметить пути оптимиза­ции сетевой модели.
* Разработать календарный график распределения работ по срокам и исполнителям

Таблица 3 – Исходные данные к задаче

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Работа** | | Описание работы | **Оценка длительности работ**  **(недели)** | | |  |
| **i** | **j** | **tmin** | **tmax** | **tож** |
|  |  | Установление требуемых пара­метров, конструктивных особен­ностей и области применения нового изделия | 0,5 | 1,75 |  |  |
|  |  | Сравнительный анализ аналогов и обоснование целесообразности изготовления изделия | 1,5 | 2,75 |  |  |
|  |  | Технико - экономическое обос­нование нового изделия | 0,5 | 1,75 |  |  |
|  |  | Выбор методики испытания из­делия | 0,2 | 2,2 |  |  |
|  |  | Оформление, согласование и ут­верждение технического задания на проектирование | 0,2 | 2,2 |  |  |
|  |  | Разработка блок - схем и эскизов общего вида изделия, агрегатов, систем | 2 | 7 |  |  |
|  |  | Разработка общих компоновок агрегатов, систем и изделия в целом | 3 | 8 |  |  |
|  |  | Изготовление и испытание маке­та | 1 | 8,5 |  |  |
|  |  | Разработка принципиальных схем систем изделия (электриче­ских, механических, оптических и т.д.) | 7 | 12 |  |  |
|  |  | Технические расчеты изделия в целом, агрегатов и узлов | 10 | 15 |  |  |
|  |  | Разработка чертежей общих ви­дов агрегатов, узлов и деталей | 11 | 16 |  |  |
|  |  | Технико-экономическое обосно­вание конструкций узлов | 1,5 | 2,75 |  |  |
|  |  | Разработка узловых специфика­ций | 0,5 | 1,75 |  |  |
|  |  | Разработка спецификаций сорторазмеров материалов | 1,5 | 2,75 |  |  |
|  |  | Разработка материальных норма­тивов | 2 | 4,5 |  |  |
|  |  | Оформление и утверждение тех­нического проекта | 0,2 | 2,2 |  |  |
|  |  | Разработка рабочих чертежей деталей | 4 | 9 |  |  |
|  |  | Разработка монтажных схем | 2 | 7 |  |  |
|  |  | Разработка сборочных чертежей узлов, агрегатов, систем и изде­лия в целом | 3 | 8 |  |  |
|  |  | Оформление и согласование ра­бочего проекта | 1,5 | 2,75 |  |  |

# Индивидуальное домашнее задание 8

**Тема:** Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания

**Цель работы:** научиться вычислять характеристики систем массового обслуживания

**Подготовка к занятию:** Повторить теоретический материал по теме «Системы массового обслуживания»

**Литература:**

1. Лобачева М.Е. Конспект лекций «Математические методы», 2013г.
2. Агальцов В.П. Математические методы в программировании, 2010г.

**Перечень необходимых приборов, инструментов, материалов:** ПЭВМ

Часто приходится сталкиваться с такими ситуациями: очередь покупателей в кассах магазинов; колонна автомобилей, движение которых остановлено светофором; ряд станков, вышедших из строя и ожидающих ремонта, и т.д. Все эти ситуации объединяет то, что системам необходимо пребывать в состоянии ожидания. Ожидание является следствием вероятностного характера возникновения потребностей в обслуживании и разброса показателей обслуживающих систем, которые называют *системами массового обслуживания (СМО).*

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживаемых единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т.д.

Основными элементами СМО являются источники *заявок*; их *входящий*

**В зависимости от характера формирования очереди СМО различают:**

1. системы с отказами, в которых при занятости всех каналов обслуживания заявка не встает в очередь и покидает систему необслуженной;
2. системы с неограниченными ожиданиями, в которых заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы были заняты.
3. системы смешанного типа с ожиданием и ограниченной длиной очереди: заявка получает отказ, если приходит в момент, когда все места в очереди заняты. Заявка, попавшая в очередь, обслуживается обязательно.

**По числу каналов обслуживания** СМО делятся на одноканальные и многоканальные.

**В зависимости от расположения источника требований**, системы могут быть разомкнутыми (источник заявок находится вне системы) и замкнутыми (источник находится в самой системе).

Рассмотрим в отдельности элементы СМО.

*Входящий поток*: на практике наиболее распространенным является простейший поток заявок, обладающий свойствами стационарности ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества требований (заявок) в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка.

Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок.

Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента. В этом случае вероятность того, что число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени *t*, равно *k*, определяется по закону Пуассона.

Pk(t)=( (λt)k / k! ) е-λt

где *λ* – интенсивность потока заявок*,* т.е. среднее число заявок в единицу времени:  (чел/мин, р/ч, автом/дн, кВт/ч), где  – среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками;

*k –* число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени *t*.

Для такого потока время между двумя соседними заявками распределено экспоненциально с плотностью вероятности:

f(t)= λ е-λt

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания считают распределенным экспоненциально:

f(t)=υе-υt,

где *υ* – интенсивность движения очереди, т.е. среднее число заявок, приходящихся на обслуживание в единицу времени: , где  – среднее значение времени ожидания в очереди.

Выходящий поток заявок связан с потоками обслуживания в канале, где длительность обслуживания является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

f(t*обс*)= μe-μt,

где *μ* – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в ед. времени: μ=1/ t*обс*(чел/мин, р/дн, кг/ч, докум/дн), *t* – среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является интенсивность нагрузки

ρ=λ/ μ

**СМО с отказами**

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему необслуженной. Показателем качества обслуживания выступает вероятность получения отказа. Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки (*tобс*) распределена по показательному закону.

**Формулы для расчета установившегося режима**

1. Вероятность простая каналов обслуживания, когда нет заявок (*k* = 0): 
2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми (*k = n*): 
3. Вероятность обслуживания: *Робс= 1- Pотк*
4. Среднее число занятых обслуживанием каналов: 
5. Доля каналов, занятых обслуживанием: 
6. Абсолютная пропускная способность СМО: A=λ Робс

**СМО с неограниченным ожиданием**

Заявка, поступившая в систему с неограниченным ожиданием и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов.

Основной характеристикой качества обслуживания является время ожидания (время пребывания заявки в очереди).

Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т.е. Pотк=0 и Робс=1.

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1. обслуживание в порядке очереди по принципу «первым пришел – первым обслужен»;
2. случайное неорганизованное обслуживание по принципу «последний пришел - первым обслужен»;
3. обслуживание с приоритетами по принципу «генералы и полковники вне очереди».

**Формулы для расчета установившегося режима**

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок (k=0): 

Предполагается, что *ρ/n<*1, т.е. интенсивность нагрузки меньше числа каналов.

1. Вероятность занятости обслуживанием *k* заявок: , 1≤ k≤ n
2. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов: 
3. Вероятность того, что заявка ожидается в очереди: 
4. Среднее число заявок в очереди: 
5. Среднее время ожидания заявки в очереди: 
6. Среднее время ожидания заявки в СМО: 
7. Среднее число занятых обслуживанием каналов: 
8. Среднее число свободных каналов: 
9. Коэффициент занятости каналов обслуживания: 
10. Среднее число заявок в СМО: 

**СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди**

Заявка, поступившая в систему с ожиданием с ограниченной длиной очереди и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

Основной характеристикой качества системы является отказ заявке в обслуживании. Ограничения на длину очереди могут быть из-за:

1. ограничения сверх времени пребывания заявки в очереди;
2. ограничения сверх длины очереди;
3. ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

**Формулы для установившегося режима**

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок (k=0): 

*n* – число каналов;

*m* – длина накопителя;

*ρ* – интенсивность нагрузки;

*К* – число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени *t*.

1. Вероятность отказа в обслуживании: 
2. Вероятность обслуживания: Робс= 1- Pотк
3. Абсолютная пропускная способность: A=λ Робс
4. Среднее число занятых каналов: , где ρ=λ/ μ
5. Среднее число заявок в очереди: 
6. Среднее время ожидания обслуживания: 
7. Среднее число заявок в системе: 
8. Среднее время пребывания в системе: tсмо= z/λ 

**Примеры решения задач**

Пример № 1. Дежурный администратор города имеет 5 телефонов. Звонки поступают с интенсивностью 90 звонков/час. Средняя продолжительность разговора составляет 2 мин.

Определить характеристики дежурного администратора как системы массового обслуживания.

Решение:

1. Классифицируем СМО:

* с отказами (нет накопителя);
* многоканальная (5 телефонов = 5 каналов).

2. Обозначения:

λ – интенсивность потока заявок (λ=90зв/60мин=3зв/2мин)

n – число каналов (n=5);

μ – интенсивность потока обслуживания, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени (μ=1/ tобс)

tобс – среднее время обслуживания (tобс=2мин)

ρ – интенсивность нагрузки;

k – номер заявки (число заявок), k=n=5;

Р0 – вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок;

Ротк – вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми;

Робс – вероятность обслуживания.

nз = ρ\* Робс - среднее число занятых обслуживанием каналов.

кз = nз / n - для каналов, занятых обслуживанием.

А = λ Робс - абсолютная пропускная способность СМО.

3. Определяем характеристики данной СМО:

а) ρ = λ/μ = λ/(1/tобс) = λ tобс = 3/2 \* 2 = 3

б) = 1/ (ρ0/0!)+(ρ1/1!)+(ρ2/2!)+(ρ3/3!)+(ρ4/4!)+(ρ5/5!) =

=1/ (1+3/1)+(3\*3/1\*2)+(3\*3\*3/1\*2\*3)+(3\*3\*3\*3/1\*2\*3\*4)+(3\*3\*3\*3\*3/1\*2\*3\*4\*5)

=1/ 1+3+(9/2)+(27/6)+(81/24)+(243/120)=0,054

в) = (35/ 1\*2\*3\*4\*5)\*0,054=(3\*3\*3\*3\*3/1\*2\*3\*4\*5)\*0,054=(243/120)\*0,054=0,12

г) **Робс = 1- Ротк**= 1-0,12=0,88

д) **nз = ρ\*Робс**= 3\*0,88=2,6

е) **кз = nз / n** = 2,6/5=0,52

ж) **А = λ Робс** = (3/2)\*0,88 = 1,31.

Пример № 2. На автомобильной стоянке возле магазина имеется 2 места. Рядом находится площадка на 2 а/м. На стоянку прибывает 1 машина в 3 мин. Среднее время нахождения водителя в магазине 2 мин. Определить характеристики этой СМО.

Решение:

1. Классифицируем СМО:

- с ограниченной длиной очереди

- с накопителем

- многоканальная

- с ограничением общего времени пребывания заявки в системе СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

2. Обозначения:

m=2 - длина накопителя

n=2 - число каналов

Остальные обозначения - как в Примере № 1.

3) Определяем характеристики данной СМО:

а) **λ** = 1/3;

б) **tобс**= 2 мин;

в) **ρ = λ/μ = λ/(1/tобс) = λ tобс** = (1/3)\*2=2/3.

г) Вероятность простоя каналов: =

=1/ ((ρ0/0!)+(ρ1/1!)+(ρ2/2!)+(ρ2+1/1\*2(2-ρ))\*[1-(ρ/2)2]=1/ ( (2/3)/0! )+2/3+( (2/3)2/(1\*2) )+

+( (2/3)3/ 2(2-2/3) ) [1- ( (2/3)/2 )]= 1/ 1+2/3+2/9+1/9[1-1/9]=0,52

д) Вероятность отказа в обслуживании: = ((2/3)4/1\*2\*22)\*0,52 =(16/81)/8\*0,52=0,013

е) Вероятность обслуживания: **Робс = 1- Ротк**= 0,987

ж) Абсолютная пропускная способность: **А = λ Робс**= 0,987\*1/3=0,33

з) Среднее число занятых каналов: **nз = ρ\*Робс**= 2/3\*0,987=0,658

Для каналов, занятых обслуживанием:

**кз =** 0,658/2=0,329.

и) Среднее число заявок в очереди: 

**=(** (2/3)3/(2\*2) **)**\* 1-**(** (2/3)/2)2 **)**\***(** 2+1-2\*((2/3)/2) **)**/ **(**1-(2/3)/2)2**)** \*0.52

=(8/27)/4\* \* (1-1/9\*7/3) /(4/9)= 2/27\*((20/27)/(4/9))\*0.52=2/27\*5/3\*0.52=0.14

к) Среднее время ожидания обслуживания:= 0.14/0.33=0.42

л) Среднее число заявок в системе: **=**0,14+0,66=0,8

м) Среднее время пребывания в системе: **tсмо= Z/ λ** = 0,8/0,33=2,42 или

**tсмо= tor+ toбс**= 0,42+2=2,42 мин

**Задание на занятие:**

Решить задачу на определение основных характеристик системы массового обслуживания в соответствии со своим вариантом.

Вариант 1

Дежурный по администрации города имеет 8 телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 120 заявок в час. Средняя продолжительность разговора составляет 2мин.

Определить показатели дежурного администратора как объекта СМО.

Вариант 2

На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается.

Определить среднее количество мест, не занятых автомобилями, и вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.

Вариант 3

В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больным поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составит 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин.

Определить основные показатели работы службы «Скорой помощи» как объекта СМО и рассчитать, сколько потребуется телефонных аппаратов, чтобы удовлетворить не менее 90% поступающих вызовов врачей.

Вариант 4

АТС предприятия обеспечивает не более 5 переговоров, одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в секунду.

Определить характеристики АТС как объекта СМО.

Вариант 5

В морской порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 часов. Краны работают круглосуточно.

Определить характеристики работы порта как объекта СМО.

Вариант 6

В магазине покупателей обслуживают 2 продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя – 4 мин. Интенсивность потока покупателей – 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоит 5 человек, не ждет снаружи и уходит.

Определить вероятность того, что пришедший в магазин покупатель покинет магазин необслуженным.

Вариант 7

Морской вокзал обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно морским сообщением, интенсивность потока сообщений составляет 0,9 человек/мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин.

Определить среднее число пассажиров у кассы и среднее время, затрачиваемое пассажиром на приобретение билета.

Вариант 8

На АЗС имеются 3 колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю АЗС. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин.

Определить вероятность отказа, абсолютную пропускную способность АЗС, среднее число машин, ожидающих заправку, среднее время ожидания машины в очереди, среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).

Вариант 9

Салон – парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин.

Определить среднюю очередь на обслуживание, считая ее неограниченной.

Вариант 10

В мастерской бытового обслуживания работают 3 мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 час, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин.

Определить вероятность того, что клиент получит отказ, будет обслужен, а также среднее число клиентов, обслуживаемых мастерской в течение 1 часа и среднее число занятых мастеров.

**Контрольные вопросы:**

1. Что понимается под системами массового обслуживания (СМО) и для чего они предназначены?
2. На какие классы делятся СМО в зависимости от:

а) характера потоков,

б) числа каналов,

в) дисциплины обслуживания,

г) ограничения потока заявок,

д) количества этапов обслуживания?

1. Что понимается под «потоком обслуживания заявок»?
2. Понятия входного и выходного потоков СМО.
3. Перечислите основные характеристики эффективности функционирования многоканальной СМО с отказами.
4. Перечислите основные характеристики эффективности функционирования многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди.
5. Перечислите основные характеристики эффективности функционирования многоканальной СМО с неограниченным ожиданием.

# Индивидуальное домашнее задание 9

**Тема**: Построение прогнозов статистическими методами с помощью инструментария MS Excel

# Индивидуальное домашнее задание 10

# Индивидуальное домашнее задание 11

# Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

1. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПб.: Питер. 2008. – 446 с.
2. Монахов. А.В. Математические методы анализа экономики / А.В. Монахов. – СПб.: Питер. 2002. – 176 с.
3. Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.
4. Палий, И.А. Линейное программирование. Учебное пособие / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008. – 256 с.
5. Партыка, Т.Л. Математические методы: Учебник / Т.Л. Партыка, И.И. Попов. – М.:ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005. – 464 с.
6. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие / кол. авторов; под ред. С.И. Макарова, С.А. Севастьяновой. – М.: КНОРУС, 2009. – 208 с.

**Интернет-ресурсы:**

1. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс] – Режим доступа:[http://ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org/) **–**;
2. ИНТУИТ. Национальный открытый университет. Проект [Издательства «Открытые Системы](http://www.osp.ru/)». [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://Intuit.ru
3. Научная электронная библиотека; [Электронный ресурс] – Режим доступа: [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru/) –
4. Новая электронная библиотека[Электронный ресурс] – Режим доступа: [www.newlibrary.ru](http://www.newlibrary.ru/) -;
5. Общероссийский математический портал[Электронный ресурс] – Режим доступа: [www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru/) –;
6. Федеральный портал российского образования[Электронный ресурс] – Режим доступа: [www.edu.ru](http://www.edu.ru/) –;